کد فرم : **FR/FY/11**
ویرایش : صفر

(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم)
دانشکده ریاضی

گروه آموزشی : **ریاضی** امتحان درس : **ریاضی۲ – فنی (۱۳ گروه هماهنگ)** نیمسال (اول/**دوم**) **۹۲-۱۳۹۱** نام مدرس:
نام و نام خانوادگی : شماره دانشجویی : تاریخ : **۱۳۹۲/۳/۸** وقت : **۱۳۵** دقیقه

توجه :
مطالب صفحه اول پاسخنامه را به دقت مطالعه نمایید.
در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال۱- مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x,y,z)=x-۲y+۵z$ را روی کره $x^۲+y^۲+z^۲=۳۰$ بیابید. **۱۵ نمره**

سوال۲- مقدار انتگرال منحنی‌الخط زیر را محاسبه کنید : **۱۵ نمره**

$$I=\int_{(۰,۲,\pi)}^{(۲,\pi,۴)} ۲\cos y dx+(\frac{۱}{y}-۲x\sin y)dy+\frac{۱}{z}dz$$

سوال۳- انتگرال دوگانه $\int_۰^۴\int_{\sqrt{y}}^۲ \sqrt{x^۳+۱}\,dx\,dy$ را محاسبه کنید. **۲۰ نمره**

سوال۴- مساحت قسمتی از صفحه $۳x+۴y+۱۲z=۱$ که داخل استوانه $y^۲+z^۲=۱$ قرار دارد را محاسبه کنید. **۱۵ نمره**

سوال۵- حجم ناحیه درون سهمیگون $az=x^۲+y^۲$ و محدود به رویه $x^۲+y^۲+z^۲=۲a^۲$ را بدست آورید. ($a>۰$) **۱۵ نمره**

سوال۶- V ناحیه محدود به سهمیگون $z=x^۲+y^۲$ و صفحه $z=۱$ و S سطح خارجی آن است. برای تابع برداری $F=xi+yj+۲k$ مقدار انتگرال $\iint_S F\cdot\vec{n}\,dS$ (شارّ برونسو) را محاسبه کنید. **۲۰ نمره**

سوال۷- فرض کنید $F=(-\sin y, x\cos y)$ یک میدان برداری و D ناحیه مربعی باشد که توسط خطوط $x=\frac{\pi}{۲}$ و $y=\frac{\pi}{۲}$ از ناحیه اول جدا می شود. درستی قضیه گرین را بررسی کنید. **۲۰ نمره**
(صورت قضیه گرین : $\oint_C F\cdot dR=\iint_D (Q_x-P_y)dxdy$)

موفق باشید

سوال۱- برای استفاده از ضرایب لاگرانژ می نویسیم : $g(x,y,z)=x-۲y+۵z-\lambda(x^۲+y^۲+z^۲-۳۰)$

اکنون باید داشته باشیم : $g_x=۱-۲\lambda x=۰\ ,\ g_y=-۲-۲\lambda x=۰\ ,\ g_y=۵-۲\lambda x=۰\ ,\ g_\lambda=-\lambda(x^۲+y^۲+z^۲-۳۰)$

یعنی : $x=\frac{۱}{۲\lambda}\ ,\ y=\frac{-۱}{\lambda}\ ,\ z=\frac{۵}{۲\lambda}\ \rightarrow\ \frac{۱}{۴\lambda^۲}+\frac{۱}{\lambda^۲}+\frac{۲۵}{۴\lambda^۲}=۳۰\ \rightarrow\ \frac{۳۰}{۴\lambda^۲}=۳۰\ \rightarrow\ \lambda=\pm\frac{۱}{۲}$

بنابر این $(x,y,z)=\pm(۱,-۲,۵)$ و در نتیجه $Max\,f=f(۱,-۲,۵)=۳۰$ و $Min\,f=f(-۱,۲,-۵)=-۳۰$

سوال۲- قرار می دهیم $F=(۲\cos y,\ln y-۲x\sin y,\frac{۱}{z})$ و داریم $curlF=(۰-۰,۰-۰,-۲\sin y+۲\sin y)=(۰,۰,۰)$

بنابر این تابع f وجود دارد بطوریکه $\nabla f=F$ پس انتگرال مستقل از مسیر است.

به سادگی می توان دید که $f(x,y,z)=۲x\cos y+\ln y+\ln z$ و در نتیجه :

$$I=f(۲,\pi,۴)-f(۰,۲,\pi)=(-۲+\ln\pi+\ln ۴)-(۰+\ln ۲+\ln\pi)=-۲+\ln ۲$$

سوال۳- ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم.

$$\int_۰^۴\int_{\sqrt{y}}^۲\sqrt{x^۳+۱}\,dx\,dy=\int_۰^۲\int_۰^{x^۲}\sqrt{x^۳+۱}\,dy\,dx=\int_۰^۲\sqrt{x^۳+۱}\times y\,|_۰^{x^۲}\,dx=\int_۰^۲x^۲\sqrt{x^۳+۱}\,dx$$

$$=\frac{۲}{۹}\sqrt{(x^۳+۱)^۳}\,|_۰^۲=\frac{۲}{۹}(۲۷-۱)=\frac{۵۲}{۹}$$

سوال۴- تصویر سطح مورد نظر بر روی صفحه yz دایره $y^۲+z^۲=۱$ است. بردار قائم آن عبارت است از $N=(۳,۴,۱۲)$ و داریم $\vec{n}=\frac{۱}{۱۳}(۳,۴,۱۲)$ بنابر این $dy\,dz=\frac{۳}{۱۳}dS$ و در نتیجه :

$$S=\iint_{y^۲+z^۲\le ۱}\frac{۱۳}{۳}dydz=\frac{۱۳}{۳}\iint_{y^۲+z^۲\le ۱}dydz=\frac{۱۳}{۳}\pi$$

سوال۵- اشتراک دو رویه ، دایره $z=a\ ,\ x^۲+y^۲=a^۲$ و تصویر ناحیه مورد نظر روی صفحه xy درون دایره $x^۲+y^۲=a^۲$ است. فرمول حجم را در هر سه دستگاه مختصات فضایی می توان نوشت اما دستگاه استوانه ای برای حل مناسبتر به نظر می رسد.

در دستگاه مختصات دکارتی حجم برابر است با :

$$V=\iiint_R dxdydz=\int_{x=-a}^{a}\int_{y=-\sqrt{a^۲-x^۲}}^{\sqrt{a^۲-x^۲}}\int_{z=\frac{x^۲+y^۲}{a}}^{\sqrt{۲a^۲-x^۲-y^۲}}dzdydx$$

در دستگاه مختصات کروی حجم برابر است با :

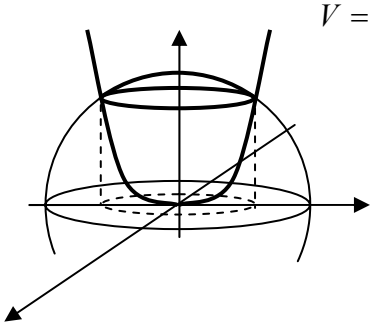
$$V=\iiint_R\rho^۲\sin\varphi\,d\rho d\theta d\varphi=\int_{\varphi=۰}^{\pi/۴}\int_{\theta=۰}^{۲\pi}\int_{\rho=۰}^{\sin^۲\varphi/a\cos\varphi}\rho^۲\sin\varphi\,d\rho d\theta d\varphi+\int_{\varphi=\pi/۴}^{\pi/۲}\int_{\theta=۰}^{۲\pi}\int_{\rho=۰}^{\sqrt{۲}a}\rho^۲\sin\varphi\,d\rho d\theta d\varphi$$

در دستگاه مختصات استوانه‌ای حجم برابر است با :

$$V=\iiint_R r\,drd\theta dz=\int_{r=۰}^{a}\int_{\theta=۰}^{۲\pi}\int_{z=r^۲/a}^{\sqrt{۲a^۲-r^۲}}r\,dzd\theta dr=\int_{r=۰}^{a}\int_{\theta=۰}^{۲\pi}(r\sqrt{۲a^۲-r^۲}-\frac{r^۳}{a})\,d\theta dr$$

$$=۲\pi\int_{r=۰}^{a}(r\sqrt{۲a^۲-r^۲}-\frac{r^۳}{۲a})\,dr=۲\pi[-\frac{۱}{۳}\sqrt{(۲a^۲-r^۲)^۳}-\frac{r^۴}{۴a}]_{r=۰}^{a}$$

$$=۲\pi[-\frac{۱}{۳}a^۳-\frac{۱}{۴}a^۳+\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}a^۳]_{r=۰}^{a}=\frac{\pi}{۶}(۸\sqrt{۲}-۷)\,a^۳$$



سوال۶- سطح S شامل دو قسمت است. سطح S_1 که قسمتی از سهمیگون $z = x^2 + y^2$ است و سطح S_2 که قسمتی از صفحه $z = 1$ است. تصویر هر دو سطح S_1 و S_2 بر روی صفحه xy درون دایره $x^2 + y^2 = 1$ است که آن را D می‌نامیم.

بردار یکه قائم بر S_1 برابر است با $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}(2x, 2y, -1)$ بنابر این داریم :

$$dS = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dxdy \ , \ \vec{n}dS = (2x, 2y, -1)dxdy$$

$$\rightarrow \iint_{S_1} F \cdot \vec{n}\, dS = \iint_D (2x^2 + 2y^2 - 2)\, dxdy = \int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi} (2r^3 - 2r)\, d\theta dr = 2\pi \int_{r=0}^{1} (2r^3 - 2r)\, dr = 2\pi(\frac{1}{2} - 1) = -\pi$$

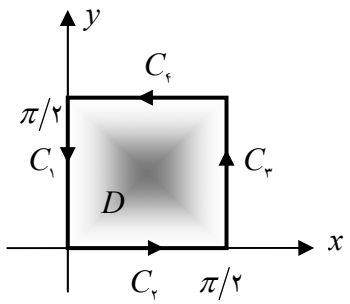
بردار یکه قائم بر سطح S_2 برابر است با $\vec{n} = (0,0,1)$ بنابر این $dS = dxdy$ و

$$\iint_{S_2} F \cdot \vec{n}\, dS = \iint_D 2\, dxdy = 2\int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta\, dr = 2\pi$$

اکنون داریم :

$$\iint_S F \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{S_1} F \cdot \vec{n}\, dS + \iint_{S_2} F \cdot \vec{n}\, dS = -\pi + 2\pi = \pi$$

سوال۷- مرز ناحیه D را C می‌نامیم که در جهت عکس عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود و شامل ۴ مسیر C_1، C_2، C_3 و C_4 است.



$$C_1 : \ x = 0 \ , \ dx = 0 \ \rightarrow \ \int_{C_1} F \cdot dR = \int_{C_1} -\sin y dx + x\cos y dy = 0$$

$$C_2 : \ y = 0 \ , \ dy = 0 \ \rightarrow \ \int_{C_2} F \cdot dR = \int_{C_2} -\sin y dx + x\cos y dy = 0$$

$$C_3 : \ x = \frac{\pi}{2} \ , \ dx = 0 \ \rightarrow \ \int_{C_1} F \cdot dR = \int_{C_1} -\sin y dx + x\cos y dy = \int_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2}\cos y dy = \frac{\pi}{2}$$

$$C_4 : \ y = \frac{\pi}{2} \ , \ dy = 0 \ \rightarrow \ \int_{C_2} F \cdot dR = \int_{x=\frac{\pi}{2}}^{0} -dx = \frac{\pi}{2}$$

در نتیجه :

$$\int_C F \cdot dR = \int_{C_1} F \cdot dR + \int_{C_2} F \cdot dR + \int_{C_3} F \cdot dR + \int_{C_4} F \cdot dR = 0 + 0 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

از طرف دیگر داریم :

$$\iint_D (Q_x - P_y) dxdy = \iint_D 2\cos y\, dx\, dy = 2\int_{y=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos y dx\, dy = \pi\int_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos y\, dy = \pi$$

بنابر این داریم $\int_C F \cdot dR = \iint_D (Q_x - P_y) dxdy$ که همان نتیجه مورد نظر است.

۱۱۳۹۲/۳/۸